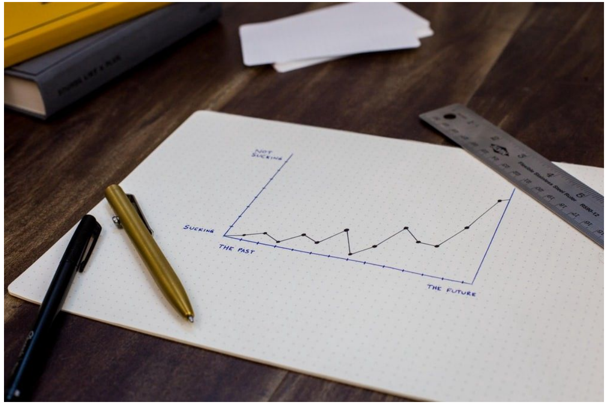
INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Introdução à Pesquisa Operacional

Prof. Dr. Eduardo Noronha de Andrade Freitas

Fases do estudo em P.O.

- Formulação do problema
- Construção do modelo do sistema
- Cálculo da solução através do modelo
- Estabelecimento de Controles da Solução
- Estabelecimento de controles da solução
- Implantação e acompanhamento



Formulação do Problema

O diálogo entre administrador do sistema e desenvolvedor do estudo em P.O. é importantíssimo!

Construção do modelo do sistema

Transformar dados em informação matemática (funções e variáveis)

Funções:

- Objetivo ou Decisão
- Restrição ou Limitação

Variáveis:

- Controladas ou de Decisão
- Não Controladas

Construção do modelo do sistema

Por que modelos?

Sistemas reais são mais complexos, modelos são computacionalmente mais baratos, podem ser alterados sem ruir o sistema real, gera novos *insights* sobre o problema.

Cálculo da solução através do modelo

As heurísticas podem ser diferentes dependendo da complexidade do sistema real, como exemplo de ferramentas matemáticas, podemos citar:

- Programação Linear (Inteira, Inteira-Mista)
- Método Simplex
- Dualidade
- etc.

Teste do modelo e da solução

Aplicação de dados empíricos do sistema real no modelo, gerando um desempenho que pode ser comparado ao do sistema real.

Estabelecimento de controles da solução

Caso for necessária a alteração de parâmetros fundamentais, deverá ser feita de modo que não sofram um desvio além do permitido.

Esse passo é muito importante para garantir a validade da solução obtida.

Implementação e acompanhamento

Apresentação da solução ao administrador

É importante ressaltar que o uso da linguagem técnica é fortemente desencorajada e deve ser trocada para um dialeto que faça sentido para o administrador, gerando uma boa vontade na implementação da solução no projeto real.

Construção do modelo

Exemplo: Função objetivo a ser maximizada: $Lucro = 2x_1 + 3x_2$

$$\text{Restrições:} \begin{cases} \text{técnicas} & \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \leq 10 \\ 6x_1 - x_2 \geq 20 \end{cases} \\ \\ \text{de não negatividade} & \begin{cases} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

Variáveis de decisão

No exemplo anterior observamos que as variáveis de decisão: *x1* e *x2*

Essas variáveis fazem parte da função objetivo:

$$4x_1 + 3x_2 \leq 10$$

Tendo como funções de restrição:

$$x_1 \geq 0 \qquad 4x_1 + 3x_2 \leq 10$$
$$x_2 \geq 0 \qquad 6x_1 - x_2 \geq 20$$

Exercícios Complementares

Exemplo 1:

Certa empresa fabrica dois produtos *P1* e *P2*. O lucro unitário do produto *P1* é de 1.000 unidades monetárias e o lucro unitário de *P2* é de 1.800 unidades monetárias. A empresa precisa de 20 horas para fabricar uma unidade de *P1* e de 30 horas para fabricar uma unidade de *P2*. O tempo anual de produção disponível para isso é de 1.200 horas. A demanda esperada para cada produto é de 40 unidades anuais para *P1* e 30 unidades anuais para *P2*. Qual é o plano de produção para que a empresa maximize seu lucro nesses itens? Construa o modelo de programação linear para esse caso.

Solução:

a. Quais as variáveis de decisão?

O que deve ser decidido é o plano de produção, isto é, quais as quantidades anuais que devem ser produzidas de *P1* e *P2*.

Portanto, as variáveis de decisão serão x_1 e x_2

$x_1 \rightarrow$ quantidade anual a produzir de *P1*

$x_2 \rightarrow$ quantidade anual a produzir de *P2*

Exercícios Complementares

b. Qual o objetivo?

O objetivo é maximizar o lucro, que pode ser calculado:

Lucro devido a $P1$: 1.000 . x_1 (lucro por unidade de $P1$ x quantidade produzida de $P1$)

Lucro devido a $P2$: 1.800 . x_2 (lucro por unidade de $P2$ x quantidade produzida de $P2$)

Lucro total: $L = 1.000x_1 + 1.800x_2$

Objetivo: maximizar $L = 1.000x_1 + 1.800x_2$

Exercícios Complementares

c. Quais as restrições?

As restrições impostas pelo sistema são:

– Disponibilidade de horas para a produção: 1.200 horas.

horas ocupadas com $P1$: $20x_1$ (uso por unidade x quantidade produzida)

horas ocupadas com $P2$: $30x_2$ (uso por unidade x quantidade produzida)

Total em horas ocupadas na produção: $20x_1 + 30x_2$

disponibilidade: 1.200 horas.

Restrição descritiva da situação: $20x_1 + 30x_2 \leq 1.200$

– Disponibilidade de mercado para os produtos (demanda)

Disponibilidade para $P1$: 40 unidades

Quantidade a produzir de $P1$: x_1

Restrição descritiva da situação: $x_1 \leq 40$

Disponibilidade para $P2$: 30 unidades

Quantidade a produzir de $P2$: x_2

Restrição descritiva da situação: $x_2 \leq 30$

Resumo do modelo : $max\ L = 1.000x_1 + 1.800x_2$

Sujeito a:

$$\text{restrições técnicas} \begin{cases} 20x_1 + 30x_2 \leq 1.200 \\ x_1 \leq 40 \\ x_2 \leq 30 \end{cases}$$

$$\text{restrições de não negatividade} \begin{cases} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Exercícios Complementares

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exemplo 2:

Para uma boa alimentação, o corpo necessita de vitaminas e proteínas. A necessidade mínima de vitaminas é de 32 unidades por dia e a de proteínas de 36 unidades por dia. Uma pessoa tem disponível carne e ovos para se alimentar. Cada unidade de carne contém 4 unidades de vitaminas e 6 unidades de proteínas. Cada unidade de ovo contém 8 unidades de vitaminas e 6 unidades de proteínas.

Qual a quantidade diária de carne e ovos que deve ser consumida para suprir as necessidades de vitaminas e proteínas com o menor custo possível? Cada unidade de carne custa 3 unidades monetárias e cada unidade de ovo custa 2,5 unidades monetárias.

Solução:

a. Quais as variáveis de decisão?

Devemos decidir quais as quantidades de carne e ovos a pessoa deve consumir no dia. As variáveis de decisão serão, portanto:

$x_1 \rightarrow$ quantidade de carne a consumir no dia

$x_2 \rightarrow$ quantidade de ovos a consumir no dia

Exercícios Complementares

b. Qual o objetivo?

O objetivo é minimizar o custo, que pode ser calculado:

Custo devido à carne: 3 . x_1 (custo por unidade x quantidade a consumir de carne)

Custo devido aos ovos: 2,5 . x_2 (custo por unidade x quantidade a consumir de ovos)

Custo total: $C = 3x_1 + 2{,}5x_2$

Objetivo: minimizar $C = 3x_1 + 2{,}5x_2$

Exercícios Complementares

c. Quais as restrições?

As restrições impostas pelo sistema são:

– necessidade mínima de vitamina: 32 unidades

vitamina de carne: 4 . x_1 (quantidade por unidade x unidades de carne a consumir)

vitamina de ovos: 8 . x_2 (quantidade por unidade x unidades de ovos a consumir)

Total de vitaminas: $4x_1 + 8x_2$

Exercícios Complementares

Necessidade mínima: 32

Restrição descritiva da situação: $4x_1 + 8x_2 \geq 32$

– necessidade mínima de proteína: 36 unidades

proteína de carne: $6 \,.\, x_1$ (quantidade por unidade x unidades de carne a consumir)

proteína de ovos: $6 \,.\, x_2$ (quantidade por unidade x unidades de ovos a consumir)

Total de proteínas: $6x_1 + 6x_2$

Necessidade mínima: 36

Restrição descritiva da situação: $6x_1 + 6x_2 \geq 36$

Resumo do modelo: $min\ C = 3x_1 + 2{,}5x_2$

Sujeito a:

restrições técnicas: $\begin{cases} 4x_1 + 8x_2 \geq 32 \\ 6x_1 + 6x_2 \geq 36 \end{cases}$

restrições de não negatividade: $\begin{cases} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$

Exercício Assíncrono

Exercícios (lista 1)

Construir o modelo matemático de programação linear dos sistemas descritos a seguir:

1. *Um sapateiro faz 6 sapatos por hora, se fizer somente sapatos, e 5 cintos por hora, se fizer somente cintos. Ele gasta 2 unidades de couro para fabricar 1 unidade de sapato e 1 unidade couro para fabricar uma unidade de cinto. Sabendo-se que o total disponível de couro é de 6 unidades e que o lucro unitário por sapato é de 5 unidades monetárias e o do cinto é de 2 unidades monetárias, pede-se: o modelo do sistema de produção do sapateiro, se o objetivo é maximizar seu lucro por hora.*

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Obrigado pela atenção!

Prof. Ph.D. Eduardo Noronha de Andrade Freitas